異なった入出力パターンのバイアスをもつ単純パーセプトロンの記憶容量

三村　和史†（正員）　岡田　真人††（正員）

Storage Capacity of Simple Perceptron for Different Input and Output Biases

Kazushi MIMURA† and Masato OKADA††, *Regular Members*

† 神戸高専電気工学科，神戸市
Dept. of Electrical Engineering, Kobe City College of Technology, 8–3 Gakuenhigashi-machi, Nishi-ku, Kobe-shi, 651–2194 Japan

†† 理化学研究所脳科学総合研究センター脳数理研究チーム，和光市
Laboratory for Mathematical Neuroscience, Brain Science Institute, RIKEN, 2–1 Hirosawa, Wako-shi, 351–0198 Japan

あらまし　単純パーセプトロンは入出力パターンに同じバイアスを加えた場合に容量は発散することが示されている．今回我々は，入出力パターンに異なるバイアスを加えた解析を行い，記憶容量は入力のバイアスには依存せず，出力のバイアスのみに依存することを示した．

キーワード　単純パーセプトロン，Gardner 容量，レプリカ法，入力バイアス，出力バイアス

1. まえがき

ニューラルネットワークは，最適化問題，画像修復，誤り訂正符号，学習機械等の問題に応用されており，その基本素子 1 個の限界を調べることは重要である．単純パーセプトロン [1] は素子のモデルの一つであり，パターン分類を行う働きをもっている．

単純パーセプトロンの分類できるパターン数の上限（正確には入力素子数の割合）を容量という．単純パーセプトロンは入力パターンにバイアスを加えた場合には，容量が発散することなどが Gardner [2] によって示されている．しかし，Gardner の理論では入力パターンと出力に同じバイアスを仮定しており，バイアスの取扱いが限定されている [2], [3].

本論文では，入出力パターンの両方に異なったバイアスを加えた場合を扱い，容量のバイアス依存性について議論する．

2. 定式化

結合荷重 $J_1, J_2, \cdots, J_N$ を通して，N 個の入力 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ を受けて，次式に従う y を出力する単純パーセプトロンを考える．

$$y = \mathrm{sgn}\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j J_j x_j - \theta\Big) \tag{1}$$

ここで，θ はしきい値，sgn() は符号関数である．更に，J_j は規格化条件 $\sum_j J_j^2 = N$ を満たしているものとする．この単純パーセプトロンは $\boldsymbol{x} \in \{+1, -1\}^N \mapsto y \in \{+1, -1\}$ という写像を実現できる．ある p 個のパターン対 $(\boldsymbol{\xi}^\mu, \sigma^\mu), \mu = 1, \cdots, p$ が与えられたときに，すべての $\boldsymbol{\xi}^\mu \mapsto \sigma^\mu$ という写像を式 (1) で再現することができる $(\boldsymbol{J}, \theta)$ が存在するか否かという問題を考える．今，$p = \alpha N$ とおいて p 個の入出力が正しく再現できるのはすべての μ で，

$$\sigma^\mu\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j J_j \xi_j^\mu - \theta\Big) > \kappa \tag{2}$$

となるときである．ここで，$\kappa > 0$ は入力の誤りを許容するマージンである．また，入力パターン $\boldsymbol{\xi}^\mu$ と出力 σ^μ はそれぞれ次式の確率で生成する．

$$P(\xi_j^\mu) = \frac{1+m}{2}\delta(\xi_j^\mu - 1) + \frac{1-m}{2}\delta(\xi_j^\mu + 1) \tag{3}$$

$$P(\sigma^\mu) = \frac{1+n}{2}\delta(\sigma^\mu - 1) + \frac{1-n}{2}\delta(\sigma^\mu + 1) \tag{4}$$

ここで，$-1 < m, n < 1$ はそれぞれ入力と出力のバイアス，$\delta(\cdot)$ はデルタ関数である．正しく入出力関係を再現できる限界の記憶率 α を容量 α_c という．$m = n = 0$ のときは，容量が $\alpha_c = 2$ までパターン対の写像を再現する $(\boldsymbol{J}, \theta)$ が存在することが知られている [2], [4]．$m = n$ とした場合は，容量は $|m|$ に単調に増加し，$|m| \to 1$ の極限で $\alpha_c = -\frac{1}{(1-|m|)\log(1-|m|)}$ と発散することが知られている [2]．しかし，パターン対のバイアスが入力 $\boldsymbol{\xi}^\mu$ と出力 σ^μ で同じであると仮定しているため，入力バイアスと出力バイアスのどちらの影響によるかを区別できない．そこで本論文では，$m \neq n$ の場合について議論する．

3. 理　論

結合荷重 $\boldsymbol{J}$ の体積 V の α 依存性から容量を求める．体積 V は入力パターン及び出力に依存するため，入力パターン及び出力の分布についての平均 $< \cdot >$ をとり，レプリカ法により $< \log V >= \frac{1}{\tilde{n}} \log < V^{\tilde{n}} >$ $(\tilde{n} \to 0)$ を評価することにより計算する．体積 $< V^{\tilde{n}} >$ は次式のようになる．

$$< V^{\tilde{n}} >$$
$$= \Big\langle \prod_\alpha \int \Big(\prod_j dJ_j^\alpha \Big)$$

$$\times \Big\{ \prod_{\mu} \Theta\Big(\sigma^{\mu}\Big[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j J_j \xi_j^{\mu} - \theta\Big] - \kappa\Big)\Big\}$$
$$\times \delta\Big(\sum_j (J_j^{\alpha})^2 - N\Big)\Big\rangle$$
$$\times \Big[\prod_{\alpha}\int\Big(\prod_j dJ_j^{\alpha}\Big)\delta\Big(\sum_j (J_j^{\alpha})^2 - N\Big)\Big]^{-1} \tag{5}$$

ここで，$\Theta(x)$ は $x > 0$ で 1，$x \leq 0$ で 0 をとる階段関数である．次に，レプリカ間の結合荷重の相関を表す変数 $q^{\alpha\beta}$ を導入する．

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\sum_j J_j^{\alpha} J_j^{\beta} \tag{6}$$

更に，レプリカ対称性 $q^{\alpha\beta} = q$ を仮定すると，鞍(あん)点法により体積は次のように評価できる．

$$< V^{\tilde{n}} > \propto \exp\Big(N\tilde{n}\,\mathrm{ext}\,G(q,v)\Big) \tag{7}$$

ここで，

$$G(q,v)$$
$$= \alpha\left[\frac{1+n}{2}\int Dt \log H\left(\frac{\frac{\kappa - mv}{\sqrt{1-m^2}} + t\sqrt{q}}{\sqrt{1-q}}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1-n}{2}\int Dt \log H\left(\frac{\frac{\kappa + mv}{\sqrt{1-m^2}} + t\sqrt{q}}{\sqrt{1-q}}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\log(1-q) + \frac{q}{2(1-q)} \tag{8}$$

である．また，ext は q に関して最小値をとり，v に関して最大値をとる演算子を表し，$\tilde{n}$ はレプリカ数，v は各レプリカの結合荷重の平均値及びしきい値に関する量，$H(x) = \int_x^{\infty} Dt$，$Dt = (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2} dt$ を表す．式 (7) は，次の鞍点方程式から得られる鞍点により評価できる．

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial G}{\partial v} = 0 \tag{9}$$

今，体積が $< V^{\tilde{n}} > \to 0$ となる場合とは，$q \to 1$ となるときであることに着目すると，式 (9) の鞍点方程式で $q \to 1$ の極限をとって得られる，

$$\alpha_c^{-1} = \frac{1+n}{2}\int_{\frac{mv-\kappa}{\sqrt{1-m^2}}}^{\infty} Dt\Big(\frac{\kappa - mv}{\sqrt{1-m^2}} + t\Big)^2$$
$$+ \frac{1-n}{2}\int_{\frac{-mv-\kappa}{\sqrt{1-m^2}}}^{\infty} Dt\Big(\frac{\kappa + mv}{\sqrt{1-m^2}} + t\Big)^2 \tag{10}$$

を解くことにより記憶率 α が求まる．ただし v は，

$$\frac{1+n}{2}\int_{\frac{mv-\kappa}{\sqrt{1-m^2}}}^{\infty} Dt\Big(\frac{\kappa - mv}{\sqrt{1-m^2}} + t\Big)$$
$$= \frac{1-n}{2}\int_{\frac{-mv-\kappa}{\sqrt{1-m^2}}}^{\infty} Dt\Big(\frac{\kappa + mv}{\sqrt{1-m^2}} + t\Big) \tag{11}$$

を解いて得る．

4. む す び

マージンがない場合，すなわち $\kappa = 0$ のときは，$mv/\sqrt{1-m^2} \to m$ と置き直すことにより，

$$\alpha_c^{-1} = \frac{1+n}{2}\int_v^{\infty} Dt\Big(-v + t\Big)^2$$
$$+ \frac{1-n}{2}\int_{-v}^{\infty} Dt\Big(v + t\Big)^2 \tag{12}$$

を得る（図 1）．同様に，v は次式で与えられる．

$$\frac{1+n}{2}\int_v^{\infty} Dt\Big(-v + t\Big)$$
$$= \frac{1-n}{2}\int_{-v}^{\infty} Dt\Big(v + t\Big) \tag{13}$$

このように，$\kappa = 0$ では容量 α_c は入力バイアス m には依存せず，$\alpha_c = \alpha_c(m,n) = \alpha_c(n)$ となり出力バイアス n にのみ依存することがわかった．また，$n \to 1$ の極限では，$\alpha_c = -\frac{1}{(1-|n|)\log(1-|n|)}$ となる．

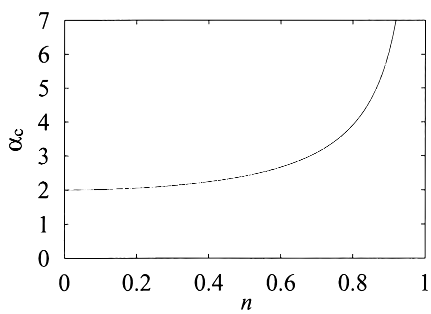

図 1　$\kappa = 0$ での容量 α_c の出力バイアス n 依存性
Fig. 1　The dependence of the capacity α_c on output-bias n at $\kappa = 0$.

文　献

[1] F. Rosenblatt, Principles of Neurodynamics, Spartan, New York, 1962.
[2] E. Gardner, "The space of interactions in neural network models," J. Physics A: Math. and Gen., vol.21, pp.257–270, 1988.
[3] J. Hertz, A. Krogh, and R.G. Palmer, Introduction to the theory of neural computation, Addison-Wesley, 1991.
[4] T.M. Cover, "Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition," IEEE Trans. Electron. Comput., vol.EC-14, p.326, 1965.

（平成 13 年 12 月 3 日受付）